



TITLE:

# Homographic Solutions of the Three Bodies Problem (力学系の理 論)

AUTHOR(S):

石井, 一平

---

CITATION:

石井, 一平. Homographic Solutions of the Three Bodies Problem (力学系の理論). 数理解析研究所講究録 1974, 216: 73-81

ISSUE DATE:

1974-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105270>

RIGHT:

# homographic solutions of the three bodies problem

東大 理 石井 一平

## §.1.

$n$ -体問題の *homographic solution* (相似解) とは、各時刻において、 $n$ -体のなす図形が、初期値において、それらによって作られる図形と相似であるような解のことをいう。

このような解は、 $n$ -体が *central configuration* (各頂点に働く力は、系の重心に向い、大きさが重心からの距離に比例するような図形) をなすときにのみ可能であり、実際に存在する。[3]。又、この解は周期解である。

ここでは、3-体問題の *homographic solution* を、方程式を変換することによって直接に求め、それらの *characteristic exponents* を考察する。

3-体問題の場合、*homographic solution* はすなわち平面問題の解である。従って我々は最初から、平面3-体問題として取り扱う。

## §.2

3-質点を  $P_1, P_2, P_3$  と名づけ、それぞれの質量を  $m_1, m_2, m_3$  とする。 $P_1, P_2, P_3$  の静止直交座標系における座標をそれぞれ  $(g_1, g_2), (g_3, g_4), (g_5, g_6)$  とし、 $g_k$  に共役な運動量を  $p_k$  とする。

よって 3 体の運動方程式は、

$$(1) \quad \dot{g}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial g_k} \quad (k=1, \dots, 6)$$

$$\begin{cases} H = T - U \\ T = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2m_2}(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2m_3}(p_5^2 + p_6^2) \\ U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}, \quad r_{kj}^2 = (g_{2k-1} - g_{2j-1})^2 + (g_{2k} - g_{2j})^2 \end{cases}$$

で与えられる。

以下簡単のため  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  として計算する。

(1) を母関数  $W_1$  による正準変換で変換する。

$$\begin{aligned} z = 0: \quad W_1 = & (g_3 - g_1)p'_1 + (g_4 - g_2)p'_2 + \left(g_5 - \frac{g_1 + g_2}{2}\right)p'_3 + \left(g_6 - \frac{g_2 + g_3}{2}\right)p'_4 \\ & + (g_1 + g_3 + g_5)p'_5 + (g_2 + g_4 + g_6)p'_6 \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad g'_k = \frac{\partial W_1}{\partial p'_k}, \quad p_k = \frac{\partial W_1}{\partial g_k} \quad \text{よって } (g_k, p_k) \text{ から } (g'_k, p'_k)$$

へ変換する。

$g'_5, g'_6, p'_5, p'_6$  は Hamiltonian に現れない。よってこれは constant。重心が原点に静止してゐるとすればこれらの constant はすべて 0 になる。

次に母関数

$$W_2 = r_1 \cos \theta_2 p'_1 + r_1 \sin \theta_2 p'_2 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) p'_3 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) p'_4$$

によって

$$\begin{cases} q'_k = \frac{\partial W_2}{\partial p'_k} & (k=1, 2, 3, 4) \\ p_{r_k} = \frac{\partial W_2}{\partial r_k} & (k=1, 2), \quad p_{\theta_k} = \frac{\partial W_2}{\partial \theta_k} & (k=1, 2) \end{cases}$$

と  $(q'_k, p'_k)$  から  $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, p_{r_1}, p_{r_2}, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$  へ正準変換を行なうと、 $\theta_2$  が Hamiltonian から消える。従って  $p_{\theta_2} = \text{const} = \mu$  と  $k$  とおく。これは実は角運動量である。

最後に、母関数

$$W_3 = \left(\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_2^2\right)p_R + \frac{\frac{r_1^2}{4} + r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2}{\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_2^2} p_\mu + \frac{\frac{r_1^2}{4} - r_1 r_2 \cos \theta + r_2^2}{\frac{3}{2}r_1^2 + 2r_2^2} p_\lambda$$

によって

$$\begin{cases} R = \frac{\partial W_3}{\partial p_R}, & \mu = \frac{\partial W_3}{\partial p_\mu}, & \lambda = \frac{\partial W_3}{\partial p_\lambda} \\ p_{r_1} = \frac{\partial W_3}{\partial r_1}, & p_{r_2} = \frac{\partial W_3}{\partial r_2}, & p_{\theta_1} = \frac{\partial W_3}{\partial \theta_1} \end{cases}$$

と  $(r_1, r_2, \theta_1, p_{r_1}, p_{r_2}, p_{\theta_1})$  から  $(R, \mu, \lambda, p_R, p_\mu, p_\lambda)$  へ変換すると Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H = & 6R p_R^2 + \frac{1}{R} \left[ \frac{F_1(\mu, \lambda)}{2} p_\mu^2 + F_2(\mu, \lambda) p_\mu p_\lambda + \frac{F_3(\mu, \lambda)}{2} p_\lambda^2 \right] \\ & + \frac{k}{R} G_1(\mu, \lambda) (p_\mu - p_\lambda) + \frac{k^2}{R} G_2(\mu, \lambda) - \frac{1}{\sqrt{R}} G_3(\mu, \lambda) \end{aligned}$$

となる。但し

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 4\mu(2-3\mu) \quad F_2 = 2(2(\mu+\lambda)-6\mu\lambda-1) \quad F_3 = 4\lambda(2-3\lambda) \\ G_1 = \frac{\{(1-\mu-\lambda)(3\mu\lambda-1)-(\mu-\lambda)^2\}^{\frac{1}{2}}}{1-\mu-\lambda} \quad G_2 = \frac{1}{1-\mu-\lambda} \\ G_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{1-\mu-\lambda}} \end{array} \right.$$

3-体の運動は

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \dot{R} = \frac{\partial H}{\partial p_R}, \quad \dot{\mu} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \\ \dot{p}_R = -\frac{\partial H}{\partial R}, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial k} \end{array} \right.$$

によって決定される。

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ p_\mu = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} k \\ p_\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} k \\ \dot{R} = \frac{\partial H_1}{\partial p_R} \\ \dot{p}_R = -\frac{\partial H_1}{\partial R} \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H_1}{\partial k} \\ H_1 = 6R p_R^2 + \frac{3k^2}{2R} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{R}} \end{array} \right.$$

が、(2)の特解であることは容易に確かめられる。これが

homographic solution である。

方程式 (3) において  $H_1$  は積分である。  $H_1 = h$  とおくと、 ( $h$  はエネルギー)

$$(4) \quad 6Rp_R^2 + \frac{3k^2}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{3}}{k^2} \right)^2 = h + \frac{9}{2k^2}$$

を得る。

これからすぐわかる様に、homographic solution はエネルギーと角運動量の間に  $h + \frac{9}{2k^2} \geq 0$  なる関係があるときのみ可能である。特に  $h + \frac{9}{2k^2} = 0$  のとき、これは Lagrange の正三角形解である。

である。

$$(4) \quad h + \frac{9}{2k^2} \geq 0 \quad \checkmark \quad h < 0 \quad \text{と} \quad \text{する。} \quad \text{そして}$$

$$(4)' \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{3k^2}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{3}}{k^2} \right) = \sqrt{h + \frac{9}{2k^2}} \cos \theta_3 \\ \sqrt{6} \sqrt{R} p_R = \sqrt{h + \frac{9}{2k^2}} \sin \theta_3 \end{cases}$$

とおくと、方程式 (4) は、

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_2 = \frac{3k}{R} \\ \dot{\theta}_3 = \frac{3k}{R} \end{cases}$$

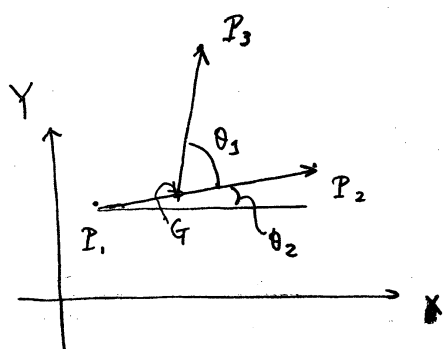
と同値。  $\theta_2$  及び  $\theta_3$  はそれぞれ  $2\pi$  を法として考えるから、

(5) は torus 上の flow を定義していて、これはすべての orbit が periodic になる場合となっている。これからも、homographic sol. が周期解であることがわかる。(但し、 $h < 0$  の場合)

$h \geq 0$  のときは、(4) から有界な解が得られないことがわかる。すなわち、 $h \geq 0$  のときの homographic sol. は、3-体が共に無限遠に去って行くような解である。

4) より,  $h + \frac{9}{2k^2}$  が十分 0 に近ければ, 対応する homographic sol. は Lagrange-解. に十分近くなることかてき。3。

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$  である場合は次の様に変数を  $\xi, \eta, \zeta$  によって全く同様の議論が出来る。



G は  $P_1, P_2$  の重心。

$$R = m_1 m_2 r_{12}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2$$

$$\mu = \frac{m_2 m_3 r_{23}^2}{R}$$

$$\lambda = \frac{m_1 m_3 r_{13}^2}{R}$$

$\theta_2$  : 固定した座標軸と  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  のなす角度。

§. 3.

linear periodic system.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A(t) : n \times n \text{ matrix}$$

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \omega \geq 0$$

の解は.  $x = c \cdot P(t) \cdot e^{tR}$  ( $c$ : constant vector,  $P(t)$ :  $n \times n$  matrix,  $P(t+\omega) = P(t)$ )

$R$ : constant matrix) と表わす。  $e^R$  の特性多項式、及び特性根をこの system の特性多項式、特性根と呼ぶことにする。

微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) ; x, t \in \mathbb{R}^n$$

のある periodic solution の特性多項式、特性根とは、その periodic solution に対する偏差方程式 (これは linear periodic system) の特性多項式、特性根のこととする。

ここで次の定理が知られている。

Theorem. A.

二つの linear periodic systems  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ ,  $\frac{dx}{dt} = B(t)x$  において、 $A(t)$  の period と  $B(t)$  の period が等しく、 $A(t)$  と  $B(t)$  とが十分近ければ、その特性根も又近い。

Theorem. B.

linear periodic system  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  の特性根がすべて絶対値 1 で、且、相異なり、 $\frac{dx}{dt} = B(t)x$  の特性多項式は、相反式であるとする。そのとき、 $\int_0^{\omega} |A(t) - B(t)| dt$  が十分小なれば、 $\frac{dx}{dt} = B(t)x$  の特性根も又、すべて絶対値 1 である。なお、 $\omega$  は  $A(t)$ ,  $B(t)$  の共通周期である。

Theorem. A, B については [1] 参照。



Theorem C. Hamiltonian system においては、任意の periodic solution の特性多項式は相反式である。[2]

そこで、系(2)の homographic solution の偏差方程式を調べる。

まず、Lagrange-solution の 偏差方程式は、

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$  をそれぞれ  $R, P_R, \mu, \lambda, P_\mu, P_\lambda$  に対する variation とすると、

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xi; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} A; \text{ } 2 \times 2 \text{ matrix} \\ B; \text{ } 4 \times 4 \text{ matrix} \end{array}$$

constant  
constant

となり、 $A, B$  それぞれの固有値は相異なる。

homographic solution の偏差方程式も、Lagrange-solution と同じ形をしている。但し、 $A, B$  は periodic function となる。

Lagrange-solution の特性根は計算を繰り返して、

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2$$

の場合、それらはすべて絶対値1であり、他の場合は  $\frac{1}{2}$  の固有値に pure imaginary なものはなく、 $A$  の固有値は pure imaginary である。

これらの事実により、上の Theorem A, B, C を適用すれば、次の結果を得る。

Theorem. homographic solution はそれより Lagrange-solution に十分近ければ、その特性根は Lagrange-solution のそれと同じ構造をもつ。

但し、ここで特性根の構造とは、絶対値が1のもの、1より大なるもの、1より小なるもののそれぞれ個数のことという。

— 参考文献 —

[1] A. Halanay ; Differential equation

(加藤順二訳 ; 吉岡書店)

[2] H. Poincaré ; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste  
vol. 1.

[3]. A. Wintner ; The analytical foundations of celestial mechanics.